Акимушкин Василий Александрович,
Поздняков Сергей Николаевич

ДЕРЕВО. ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО. АЛГОРИТМ ПРИМА

Графы, с которыми мы уже познакомились, могут нести больше информации, чем только указывать отношение между объектами. Например, схема дорог (рис. 1), кроме указания, какие пункты соединены дорожным сообщением, может содержать информацию о расстоянии между пунктами.

Для таких графов, которые называются *взвешенными* или *нагруженными*, можно поставить различные оптимизационные задачи. Например, определить, какие дороги нужно отремонтировать в первую очередь, так чтобы все пункты были соединены отремонтированными дорогами, а средств на ремонт дорог было потрачено как можно меньше. Или, как в предлагаемом ниже сюжете, соединить населенные пункты оптоволокном с минимальной затратой средств. Если считать, что количество средств на ремонт дорог или прокладку оптоволокна про-

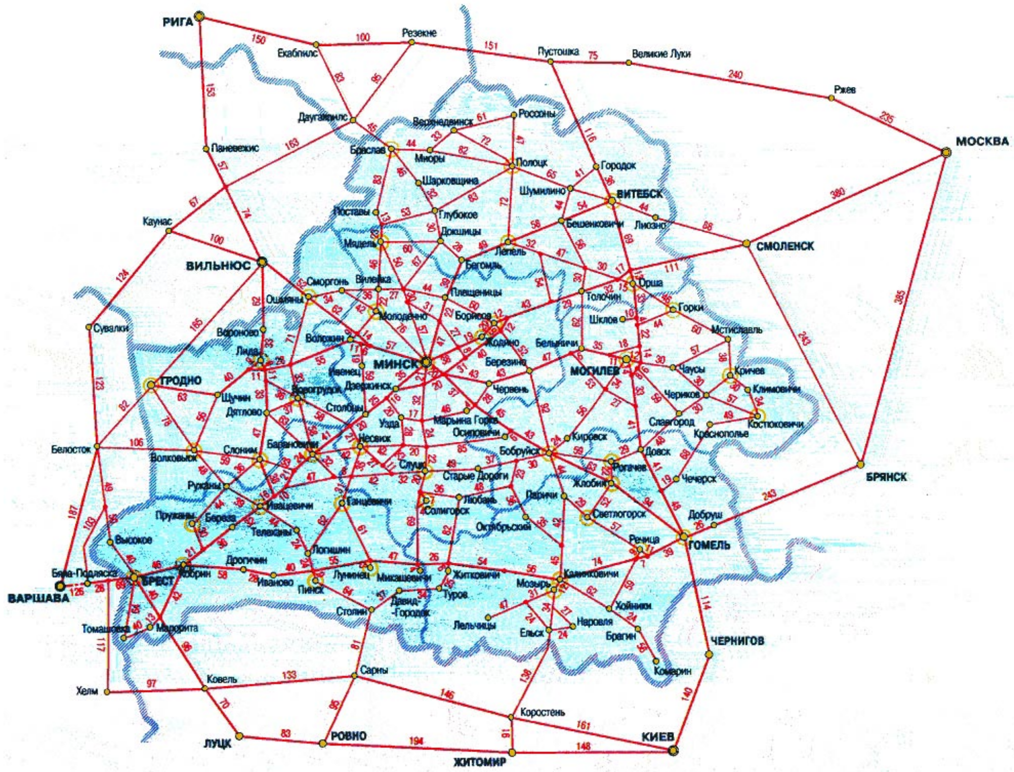


Рис. 1

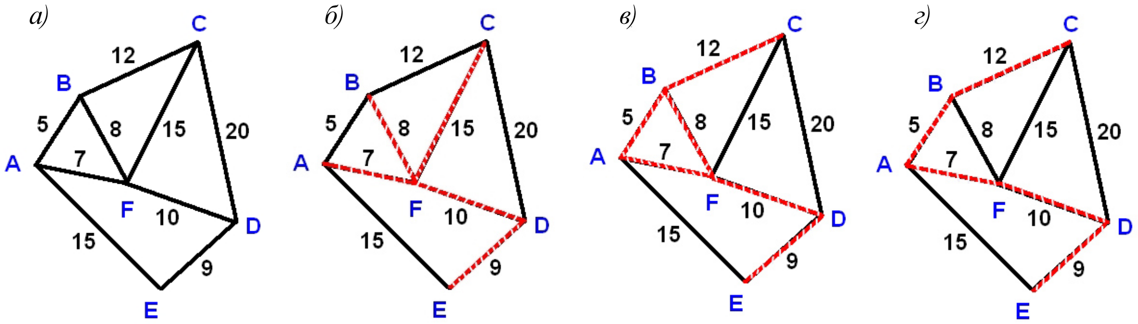


Рис. 2

порционально длинам дорог, то задачу можно поставить следующим образом.

Во взвешенном графе найти подмножество ребер, которые соединяют между собой все вершины и сумма весов которых минимальна.

На рис. 2*а* изображен граф, для которого мы хотим найти множество ребер с минимальной суммой, по которым можно было бы добраться от любой вершины до любой.

На рис. 2*б* изображено некоторое множество ребер, соединяющих все вершины графа (сумма ребер равна 49). Однако она не минимальна: мы можем заменить ребро BF ребром AB, и сумма уменьшится на 3.

На рис. 2*в* в треугольнике ABC любое из ребер можно убрать, не нарушив достижимости вершин друг из друга. Выгоднее всего убрать ребро BF, тогда получится граф, изображенный последним. Сумма его ребер 43 и с меньшей суммой построить не удастся.

Мы можем сделать вывод, что в выделенной системе дорог не должно быть циклов. Такой граф, в котором все вершины достижимы друг из друга, а циклов нет, называется *деревом* (действительно, он похож на дерево). Если в него попадают все вершины графа, то дерево называется *остовным,* или каркасом графа.

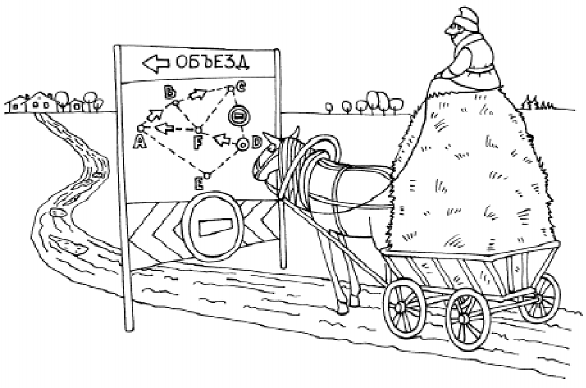
Теперь мы можем сформулировать нашу задачу так:

Для заданного взвешенного графа найти остовное дерево с минимальной суммой весов или, короче, – минимальное остовное дерево.

Алгоритм Прима, с которым вы познакомитесь на этом занятии, использует замечательное свойство остовного дерева.

Если разделить все вершины графа на два подмножества (произвольным образом) и выделить все ребра, соединяющие вершины этих подмножеств, то минимальное из этих ребер обязательно войдет в остовное дерево!

Действительно, если это будет не так (например, на рис. 3 показан разбор приме-



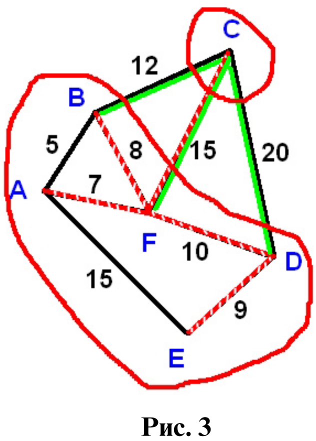


Рис. 3

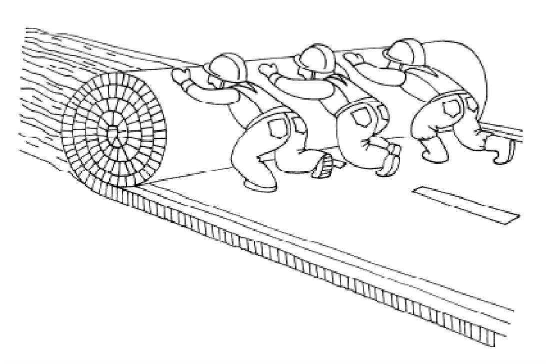
ра 1 *б*), то, когда мы разделили вершины на группы $\{A, B, D, E, F\}$ и $\{C\}$), из соединяющих их ребер BC, CF и CD выбранным оказалось не минимальное ребро BC, а ребро FC.

Если мы теперь добавим в найденное остовное дерево минимальное ребро BC, то в нем образуется цикл BFC. Если теперь «старое» ребро CF убрать, то цикла не будет, а мы получим уменьшенное остовное дерево.

На основании полученного вспомогательного утверждения мы можем сформулировать алгоритм Прима построения минимального остовного дерева.

На рис. 4 показаны первые три шага алгоритма, который строит остовное дерево, показанное на рис. 1 *г*.

На первом шаге из ребер AB, AF, AE – граничных ребер, соединяющих пока единственную обработанную вершину A с оставшимися, выбирается минимальное AB, которое становится первым ребром строящегося остовного дерева, а вторая его вершина B переносится в множество обработанных.



На втором шаге рассматриваются ребра, соединяющие уже две обработанные вершины $V = \{A, B\}$ с оставшимися. Это будут

Алгоритм Прима построения минимального остовного дерева

Взять любую вершину в качестве начальной, например вершину A, и считать её первой в множестве «обработанных» вершин V

Оставшиеся вершины графа – в нашем случае $V' = \{B, C, D, E, F\}$ – будем называть необработанными.

ПОВТОРЯТЬ ШАГИ, пока не будут обработаны все вершины:

1) Выделить граничные ребра, соединяющие обработанные вершины с необработанными;

2) Выбрать из них минимальное ребро (если их несколько, то любое из минимальных) и включить его в строящееся остовное дерево;

3) Перенести вторую вершину этого ребра из множества необработанных в множество обработанных

КОНЕЦ ЦИКЛА

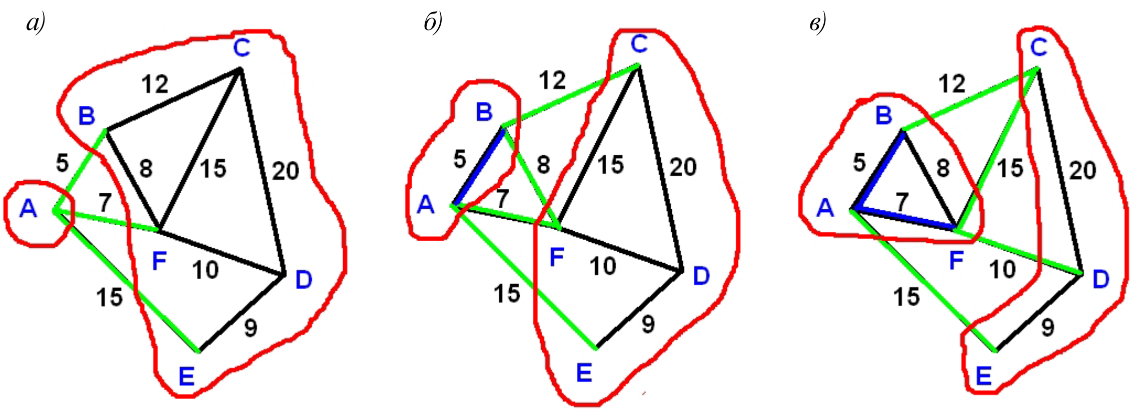


Рис. 4

граничные ребра BC, BF, AF и AE. Минимальное из них – ребро AF – переносится в остовное дерево, а множество обработанных вершин расширяется до $V = \{A, B, F\}$, и на следующем шаге нужно будет выбирать минимальное из ребер BC, FC, FD и AE.

От редакции: На сайте Интернет-школы современной информатики и дискретной математики http://kioschool.eltech.ru/, открытой Факультетом компьютерных технологий и информатики Санкт-Петербургского электротехнического университета (ЛЭТИ) совместно с Центром информатизации образования «КИО» – учредителем одноименного конкурса КИО («Конструируй, исследуй, оптимизируй»), можно зарегистрироваться на обучение в Школе и получить доступ к тренажёрам и модулям контроля.

Акимушкин Василий Александрович,
аспирант математико-механического факультета СПбГУ,
программист АНО «КИО»,

Поздняков Сергей Николаевич,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
научный руководитель Интернет-школы современной информатики и дискретной математики.